Staatliche Abschlussprüfung der Oberschule
Realgymnasium, Sprachengymnasium und technologische Fachoberschule
„Jakob Philipp Fallmerayer“
Schuljahr 2021/2022
2. schriftliche Arbeit aus Mathematik – Vorschlag 2

Dauer der Arbeit: 6 Stunden.
Das Schulgebäude darf erst 3 Stunden nach Bekanntgabe des Themas verlassen werden.
Die Benutzung eines nicht CAS-fähigen Taschenrechners ist erlaubt.
Wähle eine Problemstellung und 4 Fragestellungen aus.

Problemstellung 1:

Die Kurve „Versiera der Agnesi“ ist durch folgende Parameterdarstellung gegeben:

$$x(t) = a \cdot t \qquad \text{mit } t, a \in \mathbb{R}$$
$$y(t) = \frac{a}{t^2+1}$$

1. Zeige, dass in kartesischen Koordinaten die Gleichung $y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$ gilt.
   Welcher Wert ergibt sich für a, wenn die Funktion durch den Punkt $(1|\frac{1}{2})$ gehen soll?

   Für alle weiteren Berechnungen wird nun a = 1 gesetzt.
2. Zeichne die Kurve für a = 1 mit einer geeigneten Skalierung und führe eine Kurvendiskussion durch (Definitionsmenge, Symmetrie, Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Asymptoten)
3. Zeige: die Wendetangenten schneiden sich im Punkt $(0|\frac{9}{8})$
4. Berechne die Fläche, welche die Funktion mit der x-Achse einschließt.

Problemstellung 2:

Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung $f(x) = (a + bx) \cdot \sqrt{x}$.

1. Bestimme die Zahlen a und b so, dass die Funktion für x=4 eine Nullstelle besitzt und dort die Steigung -2 aufweist.
2. Nun sei die Funktion $f(x) = (4 - x) \cdot \sqrt{x}$ für alle weiteren Berechnungen gegeben. Untersuche den Definitionsbereich, Vorzeichen, Nullstellen, Extremalpunkte und eventuelle Wendepunkte der Funktion, zeichne ihr Schaubild.
   Tipp: es kann sich lohnen, den Funktionsterm auszumultiplizieren.
3. Welchen Flächeninhalt schließt das Schaubild der Funktion f(x) mit der x-Achse ein?
4. Wenn der Graph der Funktion f(x) um die x-Achse rotiert, entsteht ein Körper, der annähernd die Form eines Tropfens besitzt. Berechne das Volumen des entstehenden Rotationskörpers. Bestimme auch den Öffnungswinkel an der Spitze des „Tropfens“.

Fragestellungen:

1. Bestimme a und b so, dass die Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & für\ x \leq 2 \\ x^2 + ax + b & für\ x > 2 \end{cases}$ überall stetig und differenzierbar wird. Zeichne das Schaubild der Funktion.

2. Beim Werfen eines bestimmten Reißnagels landet die Kopfseite mit der Wahrscheinlichkeit 70% auf dem Boden. Der Reißnagel wird sieben Mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er drei oder vier Mal auf der Kopfseite landet?

3. Berechne den Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x \cdot sin \frac{1}{x} \right)$ und begründe deine Vorgehensweise.

4. Bei welchen Abmessungen hat ein quadratisches Prisma mit gegebenem Volumen V = 1dm³ die kleinste Oberfläche? Begründe deine Antwort. Welche besondere Form hat dabei das Prisma?

5. Gegeben seien die beiden Kurven mit den Gleichungen $y = \frac{16}{x^2}$ und $y = x^2$. Berechne die Schnittpunkte der beiden Kurven und ermittle die Gleichungen der Tangenten an diese in beiden Punkten. Welchen Flächeninhalt besitzt das Viereck, das die vier Tangenten bilden? Zeichne.

6. Beweise, dass allgemein gilt: $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$

7. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x \cdot \sin x$. Gesucht ist ihr Mittelwert im Intervall $[0;\ \pi]$.

8. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{3-2x}{x^2-3x+1}$. Bestimme jene Stammfunktion $F(x)$, deren Graph durch den Ursprung $(0|0)$ verläuft.